Modèle SGP4

Un TLE fournit les éléments orbitaux suivants :

- n_0 le moyen mouvement,
- e_0 l'excentricité,
- i_0 l'inclinaison orbitale,
- Ω_0 l'ascension droite du nœud ascendant,
- ω_0 l'argument du périgée,
- M_0 l'anomalie moyenne,
- B* le coefficient pseudo–balistique.

Nous avons également besoin de certaines constantes, telles que :

- $J_2 = 0.001\,082\,6158$ le second harmonique zonal gravitationnel de la Terre (facteur d'ellipticité géopotentiel),
- $J_3 = -0.000\,002\,538\,81$ le troisième harmonique zonal gravitationnel de la Terre,
- $J_4 = -0.000\,001\,655\,97$ le quatrième harmonique zonal gravitationnel de la Terre,
- $r_E = 6378.135$ km le rayon équatorial terrestre,
- $g_E = 398\,600.8$ la constante géocentrique de la gravitation,
- $k_E = \sqrt{\dfrac{3600\,g_E}{r_E^3}}$,
- $a_E = 1$, l'unité de distance exprimée en rayons terrestres.

Ces constantes étant définies, posons :

- $k_2 = \dfrac{J_2}{2} a_E^2$,
- $k_4 = -\dfrac{3}{8} J_4 a_E^4$,
- $A_{30} = -J_3\, a_E^3$,
- $q_0 = 120 / r_E$,
- $s = 78/r_E$,

Calculons tout d'abord les constantes suivantes :

$$a_1 = \left(\frac{k_E}{n_0}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad \delta_1 = \frac{3}{2}\frac{k_2}{a_1^2}\frac{(3\cos^2 i_0 - 1)}{(1-e_0^2)^{3/2}} \qquad a_0 = a_1\left[1 - \frac{\delta_1}{3} - \delta_1^2 - \frac{134}{81}\delta_1^3\right]$$

$$\delta_0 = \frac{3}{2}\frac{k_2}{a_0^2}\frac{(3\cos^2 i_0 - 1)}{(1-e_0^2)^{3/2}} \qquad n_0'' = \frac{n_0}{1+\delta_0} \qquad a_0'' = \frac{a_0}{1-\delta_0}$$

Le périgée, en kilomètres, est donné par :

$$per = r_E\left[a_0''(1-e_0) - 1\right]$$

Pour les périgées compris entre 98 et 156 km, s doit être changé en :

$$s^* = per / r_E - s$$

Pour les périgées plus petits que 98 km, s est changé en :

$$s^* = \frac{20}{r_E}$$

Calculons maintenant, avec la valeur appropriée de s :

$$\theta = \cos i_0 \qquad \xi = \frac{1}{a_0'' - s} \qquad \beta_0 = \sqrt{1-e_0^2} \qquad \eta = a_0'' \, e_0 \, \xi$$

$$C_2 = (q_0 - s)^4 \xi^4 \, n_0'' \, (1-\eta^2)^{-7/2} \left[a_0'' \left(1 + \frac{3}{2}\eta^2 + 4e_0 \, \eta + e_0 \, \eta^3 \right) + \frac{3}{2} \frac{k_2 \, \xi}{(1-\eta^2)} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\theta^2 \right) \left(8 + 24\eta^2 + 3\eta^4 \right) \right]$$

$$C_1 = B^* C_2 \qquad C_3 = \frac{(q_0 - s)^4 \xi^5 A_{30} n_0'' a_E \sin i_0}{k_2 e_0}$$

$$C_4 = 2n_0'' (q_0 - s)^4 \xi^4 a_0'' \beta_0^2 (1-\eta^2)^{-7/2} \times$$
$$\left(\left[2\eta (1 + \varepsilon_0 \eta) + \frac{e_0}{2} + \frac{\eta^3}{2} \right] - \frac{2k_2 \, \xi}{a_0'' (1-\eta^2)} \left[3(1-3\theta^2) \left(1 + \frac{3}{2}\eta^2 - 2e_0 \eta - \frac{e_0 \eta^3}{2} \right) + \frac{3}{4}(1-\theta^2)(2\eta^2 - e_0 \eta - e_0 \eta^3) \cos 2\omega_0 \right] \right)$$

$$C_5 = 2(q_0 - s)^4 \xi^4 a_0'' \beta_0^2 (1-\eta^2)^{-7/2} \left[1 + \frac{11}{4}\eta \, (\eta + e_0) + e_0 \eta^3 \right]$$

$$D_2 = 4a_0'' \xi C_1^2 \qquad D_3 = \frac{4}{3} a_0'' \xi^2 (17a_0'' + s) C_1^3 \qquad D_4 = \frac{2}{3} a_0'' \xi^3 (221a_0'' + 31s) \, C_1^4$$

Les effets séculaires de la traînée atmosphérique et de la gravitation sont pris en compte dans les équations suivantes :

$$M_{DF} = M_0 + \left[1 + \frac{3k_2 (3\theta^2 - 1)}{2a_0''^2 \beta_0^3} + \frac{3k_2^2 (13 - 78\theta^2 + 137\theta^4)}{16a_0''^4 \beta_0^7} \right] n_0'' (t - t_0)$$

$$\omega_{DF} = \omega_0 + \left[-\frac{3k_2 (1 - 5\theta^2)}{2a_0''^2 \beta_0^4} + \frac{3k_2^2 (7 - 114\theta^2 + 395\theta^4)}{16a_0''^4 \beta_0^8} + \frac{5k_4 (3 - 36\theta^2 + 49\theta^4)}{4a_0''^4 \beta_0^8} \right] n_0'' (t - t_0)$$

$$\Omega_{DF} = \Omega_0 + \left[-\frac{3k_2 \, \theta}{a_0''^2 \beta_0^4} + \frac{3k_2^2 (4\theta - 19\theta^3)}{2a_0''^4 \beta_0^8} + \frac{5k_4 \theta (3 - 7\theta^2)}{2a_0''^4 \beta_0^8} \right] n_0'' (t - t_0)$$

$$\delta\omega = B^* C_3 \cos \omega_0 \, (t - t_0) \qquad \delta M = -\frac{2}{3}(q_0 - s)^4 B^* \xi^4 \frac{a_E}{e_0 \eta} \left[(1 + \eta \cos M_{DF})^3 - (1 + \eta \cos M_0)^3 \right]$$

$$M_p = M_{DF} + \delta\omega + \delta M \qquad \omega = \omega_{DF} - \delta\omega - \delta M$$

$$\Omega = \Omega_{DF} - \frac{21}{2} \frac{n_0'' k_2 \, \theta}{a_0''^2 \beta_0^2} C_1 (t - t_0)^2$$

$$e = e_0 - B^* C_4 (t - t_0) - B^* C_5 (\sin M_p - \sin M_0)$$

$$a = a_0'' \left[1 - C_1 (t - t_0) - D_2 (t - t_0)^2 - D_3 (t - t_0)^3 - D_4 (t - t_0)^4 \right]^2$$

$$L = M_p + \omega + \Omega$$
$$+ n_0'' \left[\frac{3}{2} C_1 (t - t_0)^2 + (D_2 + 2C_1^2)\,(t - t_0)^3 + \frac{1}{4}(3D_3 + 12C_1 D_2 + 10C_1^3)\,(t - t_0)^4 + \frac{1}{5}(3D_4 + 12C_1 D_3 + 6D_2^2 + 30C_1^2 D_2 + 15C_1^4)\,(t - t_0)^5 \right]$$

où $t - t_0$ est le temps en minutes écoulé depuis l'époque origine.

$$\beta = \sqrt{1 - e^2} \qquad n = \frac{k_E}{a^{3/2}}$$

Les termes à longue période sont pris en compte avec :

$$a_x = e \cos \omega \qquad a_y = \frac{A_{30} \sin i_0}{4k_2\, a\, \beta^2} + e \sin \omega \qquad L_L = \frac{A_{30}\, e \sin i_0 \cos \omega}{8k_2\, a\, \beta^2} \left(\frac{3 + 5\theta}{1 + \theta} \right)$$

$$L_T = L + L_L$$

Résolvons l'équation de Kepler pour $E + \omega$, où :

$$(E + \omega)_{i+1} = (E + \omega)_i + \Delta(E + \omega)_i$$

avec :

$$\Delta(E + \omega)_i = \frac{U - a_y \cos(E + \omega)_i + a_x \sin(E + \omega)_i - (E + \omega)_i}{1 - a_y \sin(E + \omega)_i - a_x \cos(E + \omega)_i}$$

$$U = L_T - \Omega \qquad (E + \omega)_1 = U$$

Il faut ensuite déterminer :

$$e \cos E = a_x \cos(E + \omega) + a_y \sin(E + \omega)$$
$$e \sin E = a_x \sin(E + \omega) - a_y \cos(E + \omega)$$

$$e_L^2 = a_x^2 + a_y^2 \qquad p_L = a\,(1 - e_L^2) \qquad r = a\,(1 - e \cos E)$$

$$\dot{r} = \frac{k_E \sqrt{a}}{r} e \sin E \qquad r\dot{v} = \frac{k_E \sqrt{p_L}}{r}$$

$$\sin u = \frac{a}{r} \left[\sin(E + \omega) - a_y - a_x \frac{e \sin E}{1 + \sqrt{1 - e_L^2}} \right] \qquad \cos u = \frac{a}{r} \left[\cos(E + \omega) - a_x + a_y \frac{e \sin E}{1 + \sqrt{1 - e_L^2}} \right]$$

$$u = \arctan \frac{\sin u}{\cos u}$$

$$\Delta r = \frac{k_2}{2 p_L} (1 - \theta^2) \cos 2u \qquad \Delta u = -\frac{k_2}{4 p_L^2} (7\theta^2 - 1) \sin 2u \qquad \Delta\Omega = \frac{3k_2\, \theta}{2 p_L^2} \sin 2u$$

$$\Delta i = \frac{3k_2\, \theta}{2 p_L^2} \sin i_0 \cos 2u \qquad \Delta \dot{r} = -\frac{k_2 n}{p_L} (1 - \theta^2) \sin 2u \qquad \Delta r\dot{v} = \frac{k_2 n}{p_L} \left[(1 - \theta^2) \cos 2u - \frac{3}{2}(1 - 3\theta^2) \right]$$

Les perturbations à courte période sont :

$$r_k = r\left[1 - \frac{3}{2} k_2 \frac{\sqrt{1-e_L^2}}{p_L^2}(3\theta^2 - 1)\right] + \Delta r \qquad u_k = u + \Delta u$$

$$\Omega_k = \Omega + \Delta\Omega \qquad i_k = i_0 + \Delta i \qquad \dot{r}_k = \dot{r} + \Delta\dot{r} \qquad r\dot{v}_k = r\dot{v} + \Delta r\dot{v}$$

Les vecteurs directeurs unités sont donnés par :

$$\vec{U} = \vec{M}\sin u_k + \vec{N}\cos u_k \qquad \vec{V} = \vec{M}\cos u_k - \vec{N}\sin u_k$$

avec :

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} -\sin\Omega_k \cos i_k \\ \cos\Omega_k \cos i_k \\ \sin i_k \end{pmatrix} \qquad \vec{N} = \begin{pmatrix} \cos\Omega_k \\ \sin\Omega_k \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs position et vitesse sont donnés par :

$$\vec{r} = r_k \vec{U} \qquad \vec{v} = \dot{r}_k \vec{U} + r\dot{v}_k \vec{V}$$

Donnons un exemple numérique en utilisant le TLE suivant :

```
ISS (ZARYA)
1 25544U 98067A   05297.44341007  .00016375  00000-0  11528-3 0  6120
2 25544 051.6447 318.6053 0001172 087.9089 057.7350 15.74275125396023
```

La date retenue est le 1er novembre 2005 à 17h 48min 50s UTC. Les coordonnées cartésiennes (ECI) de la station internationale sont :

$$x = 3774.460 \text{ km} \qquad \dot{x} = 2.123091 \text{ km/s}$$
$$y = -3550.617 \text{ km} \qquad \dot{y} = 6.514437 \text{ km/s}$$
$$z = 4275.859 \text{ km} \qquad \dot{z} = 3.524508 \text{ km/s}$$

$$v = 7.705 \text{ km/s}$$