Modèle SGP

Ce modèle simple utilise les éléments orbitaux d'un TLE. Sachant que l'unité de temps est la minute et l'unité de distance est le rayon terrestre, on désigne par :

- n_0 le moyen mouvement,
- e_0 l'excentricité,
- i_0 l'inclinaison orbitale,
- Ω_0 l'ascension droite du nœud ascendant,
- ω_0 l'argument du périgée,
- $\frac{\dot{n}_0}{2}$ la moitié de la dérivée première du moyen mouvement,
- $\frac{\ddot{n}_0}{6}$ le sixième de la dérivée seconde du moyen mouvement,
- M_0 l'anomalie moyenne.

Nous avons également besoin de certaines constantes, telles que :

- $J_2 = 0.001\,082\,6158$ le second harmonique zonal gravitationnel de la Terre (facteur d'ellipticité géopotentiel),
- $J_3 = -0.000\,002\,538\,81$ le troisième harmonique zonal gravitationnel de la Terre,
- $J_4 = -0.000\,001\,655\,97$ le quatrième harmonique zonal gravitationnel de la Terre,
- $r_E = 6378.135$ km le rayon équatorial terrestre,
- $g_E = 398\,600.8$ la constante géocentrique de la gravitation,
- $k_E = \sqrt{\frac{3600\, g_E}{r_E^3}}$,
- $a_E = 1$, l'unité de distance exprimée en rayons terrestres.

Ces constantes étant définies, posons :

- $k_2 = \frac{J_2}{2} a_E^2$,
- $k_4 = -\frac{3}{8} J_4 a_E^4$,

Calculons tout d'abord les constantes suivantes :

$$a_1 = \left(\frac{k_E}{n_0}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad \delta_1 = \frac{3}{4}\frac{a_E^2}{a_1^2}\frac{J_2(3\cos^2 i_0 - 1)}{(1-e_0^2)^{3/2}} \qquad a_0 = a_1\left[1 - \frac{\delta_1}{3} - \delta_1^2 - \frac{134}{81}\delta_1^3\right]$$

$$p_0 = a_0(1-e_0^2) \qquad q_0 = a_0(1-e_0) \qquad L_0 = M_0 + \omega_0 + \Omega_0$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{a_E^2}{p_0^2} J_2 n_0 \cos i_0 \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4}\frac{a_E^2}{p_0^2} J_2 n_0 (5\cos^2 i_0 - 1)$$

Les effets séculaires de la traînée atmosphérique et de la gravitation sont pris en compte dans les équations suivantes :

$$a = a_0\left(\frac{n_0}{n_0 + 2\frac{\dot{n}_0}{2}(t-t_0) + 3\frac{\ddot{n}_0}{6}(t-t_0)^2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$e = \begin{cases} 1 - \dfrac{q_0}{a}, & \text{si } a > q_0 \\ 10^{-6}, & \text{si } a \le q_0 \end{cases}$$

$$p = a(1-e^2) \qquad \Omega_{s_0} = \Omega_0 + \frac{d\Omega}{dt}(t-t_0) \qquad \omega_{s_0} = \omega_0 + \frac{d\omega}{dt}(t-t_0)$$

$$L_s = L_0 + \left(n_0 + \frac{d\omega}{dt} + \frac{d\Omega}{dt}\right)(t-t_0) + \frac{\dot{n}_0}{2}(t-t_0)^2 + \frac{\ddot{n}_0}{6}(t-t_0)^3$$

où $t - t_0$ est le temps en minutes écoulé depuis l'époque origine.

Les termes à longue période sont pris en compte avec :

$$a_y = e \sin \omega_{s_0} - \frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{a_E}{p}\sin i_0 \qquad L = L_s - \frac{1}{4}\frac{J_3}{J_2}\frac{a_E}{p} a_x \sin i_0 \left(\frac{3 + 5\cos i_0}{1 + \cos i_0}\right)$$

où $a_x = e \cos \omega_{s_0}$.

Résolvons l'équation de Kepler pour $E + \omega$, où :

$$(E+\omega)_{i+1} = (E+\omega)_i + \Delta(E+\omega)_i$$

avec :

$$\Delta(E+\omega)_i = \frac{U - a_y \cos(E+\omega)_i + a_x \sin(E+\omega)_i - (E+\omega)_i}{1 - a_y \sin(E+\omega)_i - a_x \cos(E+\omega)_i}$$

$$U = L - \Omega_{s_0} \qquad (E+\omega)_1 = U$$

Il faut ensuite déterminer :

$$e \cos E = a_x \cos(E+\omega) + a_y \sin(E+\omega)$$
$$e \sin E = a_x \sin(E+\omega) - a_y \cos(E+\omega)$$

$$e_L^2 = a_x^2 + a_y^2 \qquad p_L = a\,(1 - e_L^2) \qquad r = a\,(1 - e\cos E)$$

$$\dot{r} = \frac{k_E \sqrt{a}}{r} e \sin E \qquad r\dot{v} = \frac{k_E \sqrt{p_L}}{r}$$

$$\sin u = \frac{a}{r}\left[\sin(E+\omega) - a_y - a_x \frac{e \sin E}{1 + \sqrt{1 - e_L^2}}\right] \qquad \cos u = \frac{a}{r}\left[\cos(E+\omega) - a_x + a_y \frac{e \sin E}{1 + \sqrt{1 - e_L^2}}\right]$$

$$u = \arctan \frac{\sin u}{\cos u}$$

Les perturbations à courte période sont :

$$r_k = r + \frac{1}{4}\frac{a_E^2}{p_L} J_2 \sin^2 i_0 \cos 2u \qquad u_k = u - \frac{1}{8}\frac{a_E^2}{p_L^2} J_2\ (7\cos^2 i_0 - 1)\sin 2u$$

$$\Omega_k = \Omega_{s_0} + \frac{3}{4}\frac{a_E^2}{p_L^2} J_2 \cos i_0 \sin 2u \qquad i_k = i_0 + \frac{3}{4}\frac{a_E^2}{p_L^2} J_2 \sin i_0 \cos i_0 \cos 2u$$

Les vecteurs directeurs unités sont donnés par :

$$\vec{U} = \vec{M} \sin u_k + \vec{N} \cos u_k \qquad \vec{V} = \vec{M} \cos u_k - \vec{N} \sin u_k$$

avec :

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} -\sin\Omega_k \cos i_k \\ \cos\Omega_k \cos i_k \\ \sin i_k \end{pmatrix} \qquad \vec{N} = \begin{pmatrix} \cos\Omega_k \\ \sin\Omega_k \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs position et vitesse sont donnés par :

$$\vec{r} = r_k \vec{U} \qquad \vec{v} = \dot{r}\vec{U} + r\dot{v}\vec{V}$$

Donnons un exemple numérique en utilisant le TLE suivant :

```
ISS (ZARYA)
1 25544U 98067A   05297.44341007  .00016375  00000-0  11528-3 0  6120
2 25544 051.6447 318.6053 0001172 087.9089 057.7350 15.74275125396023
```

La date retenue est le 1er novembre 2005 à 17h 48min 50s UTC. Les coordonnées cartésiennes (ECI) de la station internationale sont :

$$x = 3772.625 \text{ km} \qquad \dot{x} = 2.130019 \text{ km/s}$$
$$y = -3559.216 \text{ km} \qquad \dot{y} = 6.506574 \text{ km/s}$$
$$z = 4270.897 \text{ km} \qquad \dot{z} = 3.534627 \text{ km/s}$$

$$v = 7.705 \text{ km/s}$$

Les valeurs obtenues par le modèle SGP4 sont :

$$x = 3774.460 \text{ km} \qquad \dot{x} = 2.123091 \text{ km/s}$$
$$y = -3550.617 \text{ km} \qquad \dot{y} = 6.514437 \text{ km/s}$$
$$z = 4275.859 \text{ km} \qquad \dot{z} = 3.524508 \text{ km/s}$$

$$v = 7.705 \text{ km/s}$$

L'écart est d'un peu plus de 10 km sur la position.