Coordonnées de l'observateur et du satellite

Le repère dans lequel sont données les coordonnées cartésiennes issues des modèles SGP/SDP est le repère ECI (Earth Central Inertial), dont l'origine coïncide avec le centre O de la Terre. L'axe Ox est dirigé vers le point vernal moyen, l'axe Oy, orthogonal à Ox et pris dans le sens direct, est contenu dans le plan équatorial terrestre. Enfin, l'axe Oz est par conséquent colinéaire à l'axe de rotation de la Terre.

Comme la Terre tourne autour de l'axe Oz, les coordonnées d'un lieu situé à sa surface, dans ce repère, varient avec le temps. Le méridien de référence est le méridien de Greenwich, dont la position par rapport à l'axe Ox est définie par le temps sidéral de Greenwich θ_g. Le temps sidéral de Greenwich θ_g (en degrés) à l'instant considéré est donné par :

$$\theta_g = 280.460\,618\,37 + 360.985\,647\,366\,29(jj - 2451545) + 0.000\,387\,933 t_U^2 - t_U^3 / 38\,710\,000$$

avec jj le jour julien et $t_U = \dfrac{jj - 2451545}{36525}$.

Connaissant les coordonnées géographiques du lieu (longitude L, latitude φ et altitude h), on peut en déduire le temps sidéral local θ_L :

$$\theta_L = \theta_g - L$$

où la longitude est comptée négativement vers l'Est.

Si on considère dans un premier temps que la Terre est sphérique, de rayon $a = 6378.135$ km, les coordonnées du lieu dans le référentiel défini ci–dessus sont :

$$\begin{aligned} x_t &= (a+h)\cos\varphi\cos\theta_L \\ y_t &= (a+h)\cos\varphi\sin\theta_L \\ z_t &= (a+h)\sin\varphi \end{aligned}$$

Les coordonnées du lieu en supposant une Terre sphérique ne sont pas assez précises pour le calcul de la position topocentrique d'un satellite artificiel (elles sont suffisantes pour des corps plus lointains : Lune, Soleil, planètes…).

Si maintenant on considère une Terre aplatie aux pôles, les coordonnées ECI du lieu sont obtenues par des relations un peu plus complexes. On pose $f = \dfrac{1}{298.26}$, l'aplatissement de la Terre, de manière à ce que le rayon polaire de la Terre s'écrit :

$$b = a(1-f)$$

On a donc $b = 6356.751$ km. Si on pose :

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 + f(f-2)\sin^2\varphi}} \qquad s = (1-f)^2 c \qquad r_t = (a c + h)\cos\varphi$$

on a alors :

$$\begin{aligned} x_t &= r_t\cos\theta_L \\ y_t &= r_t\sin\theta_L \\ z_t &= (a\,s + h)\sin\varphi \end{aligned}$$

Ce sont ces coordonnées que nous utiliserons pour déterminer la position topocentrique d'un satellite artificiel.

Définissons également la vitesse du lieu d'observation dans le référentiel ECI. La rotation de la Terre sur elle–même est supposée uniforme :

$$\omega_E = \frac{2\pi \times 1.002\,737\,909\,34}{86\,400} = 7.292\,115\,855 \times 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$$

Le facteur numérique au numérateur (1.0027…) tient compte de la révolution orbitale de la Terre autour du Soleil. Ainsi, la vitesse d'un point à la surface de la Terre dans le système ECI est :

$$\dot{x}_t = -\omega_E \; y_t$$
$$\dot{y}_t = \omega_E \; x_t$$
$$\dot{z}_t = 0$$

On désigne par x_s, y_s, z_s les coordonnées cartésiennes du satellite dans le référentiel ECI et par $\dot{x}_s$, $\dot{y}_s$, $\dot{z}_s$ les composantes de la vitesse. La norme de la vitesse orbitale est donnée par :

$$v = \sqrt{\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2 + \dot{z}_s^2}$$

On détermine ensuite :

$$x = x_s - x_t \qquad \dot{x} = \dot{x}_s - \dot{x}_t$$
$$y = y_s - y_t \qquad \dot{y} = \dot{y}_s - \dot{y}_t$$
$$z = z_s - z_t \qquad \dot{z} = \dot{z}_s - \dot{z}_t$$

La distance entre l'observateur et le satellite est :

$$\Delta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Le taux de variation de cette distance (range rate) est :

$$\dot{\Delta} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{\Delta}$$

Pour calculer la hauteur H et l'azimut A (compté depuis le nord) du satellite dans le ciel de l'observateur, il faut calculer :

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta_L & \sin\varphi\sin\theta_L & -\cos\varphi \\ -\sin\theta_L & \cos\theta_L & 0 \\ \cos\varphi\cos\theta_L & \cos\varphi\sin\theta_L & \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$H = \arcsin\frac{r_z}{\Delta} \qquad A = \arctan\left(-\frac{r_y}{r_x}\right)$$

Il faut tenir compte de la réfraction atmosphérique R qui doit être ajoutée à la valeur de la hauteur si celle–ci est positive grâce à la formule suivante :

$$R = \frac{1.02}{\tan\left(H + \frac{10.3}{H + 5.11}\right)}$$

La valeur de R est ici donnée en minutes d'angle et l'argument de la tangente est pris en degrés.

Nous pouvons ensuite déterminer l'ascension droite AD et la déclinaison D du satellite :

$$\begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta_L & -\sin\theta_L & \cos\theta_L\cos\varphi \\ \sin\varphi\sin\theta_L & \cos\theta_L & \sin\theta_L\cos\varphi \\ -\cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos A\cos H \\ \sin A\cos H \\ \sin H \end{pmatrix}$$

$$D = \arcsin l_z$$

$$AD = \arctan\frac{l_y}{l_x}$$

Ensuite, la longitude λ et la latitude ϕ qui sont survolées sont déterminées par :

$$\lambda = \arctan \frac{y_s}{x_s} - \theta_g$$

ϕ est déterminée par approximations successives :

$$r = \sqrt{x_s^2 + y_s^2} \qquad\qquad e^2 = f\,(2 - f)$$

$$\phi_0 = \arctan \frac{z_s}{r}$$

puis on boucle sur ϕ_i jusqu'à ce que $\left|\phi_{i+1} - \phi_i\right| < 10^{-9}$:

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi_i}}$$

$$\phi_{i+1} = \arctan \frac{z_s + a\,c\,e^2 \sin \phi_i}{r}$$

L'altitude du satellite, prise par rapport au niveau de la mer et tenant compte de l'aplatissement du globe terrestre, est alors :

$$h = \frac{r}{\cos \phi} - a\,c$$