Chapitre 6 : Détermination des orbites paraboliques Méthode d'Olbers

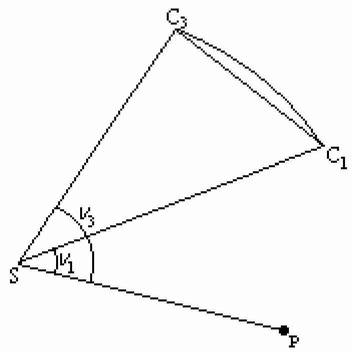
Dans ce chapitre et dans les deux suivants, nous allons aborder les méthodes pour déterminer les éléments orbitaux d'un corps dont on connaît plusieurs observations. Pour cela, il est nécessaire de posséder au minimum trois positions distinctes, chacune de ces positions fournissant deux coordonnées angulaires. Nous allons établir les principales formules de la méthode d'Olbers, puis nous les organiserons en un formulaire et terminerons le chapitre par un exemple numérique.

I. Principes de la méthode d'Olbers

La méthode mise au point par Olbers en 1797 repose sur la détermination des distances héliocentriques et géocentriques du corps considéré. La méthode est destinée aux corps ayant une orbite parabolique (ce qui concerne les comètes) mais, étant donné que ces corps, même s'ils ont une orbite elliptique, sont découverts à l'approche de leur périhélie, nous pouvons considérer que l'arc d'ellipse au voisinage du périhélie se confond avec un arc de parabole. Cette méthode permet donc de dresser une première éphéméride de la comète, même si elle possède une orbite elliptique.

Pour déterminer les éléments orbitaux de la comète, nous avons besoin de trois positions successives aux instants t_1, t_2 et t_3 avec $t_2 - t_1 \approx t_3 - t_2$.

Soit S le Soleil et C_1, C_2 et C_3 les positions de la comète aux instants t_1, t_2 et t_3. Désignons par $\vec{r_1} = \overrightarrow{SC_1}$ et $\vec{r_3} = \overrightarrow{SC_3}$. L'arc C_1C_3 sur le schéma ci–dessous est une partie de l'orbite.



Le point P, appartenant au plan SC_1C_3, est le périhélie du corps. Par conséquent, les angles mesurés sont les anomalies vraies. On a :

$$\vec{r_1} \wedge \vec{r_3} = r_1\ r_3 \sin\left(\vec{r_1}, \vec{r_3}\right) \vec{n}$$

où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal à $\vec{r_1}$ et $\vec{r_3}$.

D'autre part, la surface du triangle SC_1C_3 est :

$$S_{13} = \frac{1}{2} r_1\ r_3 \sin\left(\vec{r_1}, \vec{r_3}\right)$$

d'où :

$$\vec{r_1} \wedge \vec{r_3} = 2S_{13}\ \vec{n}$$

ou plus généralement :

$$\vec{r_p} \wedge \vec{r_q} = 2S_{pq}\ \vec{n}$$

Nous supposons que le mouvement se fait dans un plan (aucune perturbation d'origine planétaire) donc il existe une combinaison linéaire telle que :

$$\overrightarrow{r_2} = c_1 \overrightarrow{r_1} + c_3 \overrightarrow{r_3}$$

où c_1 et c_3 sont des constantes.

Multiplions vectoriellement la relation ci-dessus par $\overrightarrow{r_1}$ puis par $\overrightarrow{r_3}$:

$$\overrightarrow{r_1} \wedge \overrightarrow{r_2} = c_3 \overrightarrow{r_1} \wedge \overrightarrow{r_3} = 2c_3\ S_{13}\ \vec{n} = 2\ S_{12}\ \vec{n}$$

$$\overrightarrow{r_2} \wedge \overrightarrow{r_3} = c_1 \overrightarrow{r_1} \wedge \overrightarrow{r_3} = 2c_1\ S_{13}\ \vec{n} = 2\ S_{23}\ \vec{n}$$

$$\text{d'où } c_1 = \frac{S_{23}}{S_{13}}, \quad c_3 = \frac{S_{12}}{S_{13}} \quad \text{et} \quad \frac{c_1}{c_3} = \frac{S_{23}}{S_{12}}$$

D'après la loi des aires, l'aire balayée par le rayon vecteur est directement proportionnelle au temps :

$$\Sigma_{23} = \frac{C}{2}\left(t_3 - t_2\right) \qquad \Sigma_{12} = \frac{C}{2}\left(t_2 - t_1\right)$$

Or le rapport $\frac{S_{23}}{S_{12}}$ est égal à $\frac{\Sigma_{23}}{\Sigma_{12}}$ avec une précision du second ordre, et avec une précision du troisième ordre si les dates sont équidistantes.

$$\frac{c_1}{c_3} = \frac{S_{23}}{S_{12}} = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}$$

Désignons par T la Terre et posons :

$$\overrightarrow{TS} = \vec{R} \qquad \overrightarrow{TC} = \vec{\Delta} \qquad \overrightarrow{SC} = \vec{r}$$

La relation de Chasles nous donne :

$$\boxed{\vec{r} = \vec{\Delta} - \vec{R}}$$

Calculons $\overrightarrow{r_2}$:

$$\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{\Delta_2} - \overrightarrow{R_2} = c_1\left(\overrightarrow{\Delta_1} - \overrightarrow{R_1}\right) + c_3\left(\overrightarrow{\Delta_3} - \overrightarrow{R_3}\right)$$

$$\overrightarrow{\Delta_2} - c_1\overrightarrow{\Delta_1} - c_3\overrightarrow{\Delta_3} = \overrightarrow{R_2} - c_1\overrightarrow{R_1} - c_3\overrightarrow{R_3} = \vec{\sigma}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{R_i}$ sont les vecteurs joignant la Terre au Soleil et sont entièrement déterminés pour les trois dates. En revanche, les vecteurs $\overrightarrow{\Delta_1}$, $\overrightarrow{\Delta_2}$ et $\overrightarrow{\Delta_3}$ ne sont connus que par leur direction sur la sphère céleste (d'après les observations).

Posons, pour chaque observation (i variant de 1 à 3) :

$$\overrightarrow{\Delta_i} = \Delta_i\ \overrightarrow{\eta_i}$$

où Δ_i est la distance Terre–comète à l'instant t_i et $\overrightarrow{\eta_i}$ un vecteur unitaire dont l'origine est le centre de la Terre et pointant vers la comète.
Les composantes de $\overrightarrow{\eta_i}$ sont données à partir des ascensions droites et des déclinaisons de la comète :

$$\overrightarrow{\eta}_i \begin{pmatrix} \cos\delta_i \cos\alpha_i \\ \cos\delta_i \sin\alpha_i \\ \sin\delta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i \\ \mu_i \\ \nu_i \end{pmatrix} \quad \text{où les } \alpha_i \text{ sont exprimés en degrés}$$

$\overrightarrow{R_1}$, $\overrightarrow{R_2}$ et $\overrightarrow{R_3}$ appartiennent au plan de l'écliptique donc $\overrightarrow{R_2} = a\overrightarrow{R_1} + b\overrightarrow{R_3}$.

$\vec{\sigma} = (a - c_1)\overrightarrow{R_1} + (b - c_3)\overrightarrow{R_3}$ et de la même manière que pour la comète, nous pouvons montrer que :

$$\frac{a}{b} = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{a}{b} = \frac{c_1}{c_3} = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}$$

nous en déduisons donc que $a = \Lambda c_1$ et $b = \Lambda c_3$ où Λ est une constante.

Ainsi,

$$\vec{\sigma} = c_1(\Lambda - 1)\overrightarrow{R_1} + c_3(\Lambda - 1)\overrightarrow{R_3} = (\Lambda - 1)\overrightarrow{R_2}$$

Nous constatons que $\vec{\sigma}$ est colinéaire à $\overrightarrow{R_2}$, donc $\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{X} \wedge \overrightarrow{R_2}\right) = 0$ où $\vec{X}$ est un vecteur quelconque.
Multiplions scalairement l'égalité $\overrightarrow{\Delta_2} - c_1\overrightarrow{\Delta_1} - c_3\overrightarrow{\Delta_3} = \vec{\sigma}$ par $\overrightarrow{\Delta_2} \wedge \overrightarrow{R_2}$, nous obtenons :

$$-c_1\overrightarrow{\Delta_1} \cdot \left(\overrightarrow{\Delta_2} \wedge \overrightarrow{R_2}\right) - c_3\overrightarrow{\Delta_3} \cdot \left(\overrightarrow{\Delta_2} \wedge \overrightarrow{R_2}\right) = \vec{\sigma} \cdot \left(\overrightarrow{\Delta_2} \wedge \overrightarrow{R_2}\right) = 0$$

$$-c_1\Delta_1\Delta_2\overrightarrow{\eta_1} \cdot \left(\overrightarrow{\eta_2} \wedge \overrightarrow{R_2}\right) = c_3\Delta_3\Delta_2\overrightarrow{\eta_3} \cdot \left(\overrightarrow{\eta_2} \wedge \overrightarrow{R_2}\right)$$

On a ainsi :

$$\frac{\Delta_3}{\Delta_1} = -\frac{c_1}{c_3}\frac{\overrightarrow{\eta_1} \cdot \left(\overrightarrow{\eta_2} \wedge \overrightarrow{R_2}\right)}{\overrightarrow{\eta_3} \cdot \left(\overrightarrow{\eta_2} \wedge \overrightarrow{R_2}\right)}$$

Désignons par Q cette quantité :

$$\boxed{Q = \frac{\Delta_3}{\Delta_1} = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}\frac{\overrightarrow{\eta_1} \cdot \left(\overrightarrow{\eta_2} \wedge \overrightarrow{R_2}\right)}{\overrightarrow{\eta_2} \cdot \left(\overrightarrow{\eta_3} \wedge \overrightarrow{R_2}\right)}}$$

où toutes les quantités du dernier membre sont connues d'après les observations. Il devient alors possible de déterminer le rapport $\frac{\Delta_3}{\Delta_1}$.

Déterminons maintenant les rayons vecteurs r_i de la comète. Nous avons vu que $\overrightarrow{r_i} = \overrightarrow{\Delta_i} - \overrightarrow{R_i}$

$$\text{D'où } r_i^2 = \Delta_i^2 - 2\overrightarrow{\Delta_i} \cdot \overrightarrow{R_i} + R_i^2 = \Delta_i^2 - 2\Delta_i\overrightarrow{\eta_i} \cdot \overrightarrow{R_i} + R_i^2$$

Soit encore :

$$\boxed{r_i^2 = \Delta_i^2 - 2\left(\lambda_i X_i + \mu_i Y_i + \nu_i Z_i\right)\Delta_i + R_i^2}$$

avec $\overrightarrow{R_i}\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix}$

Posons $c = \left\|\overrightarrow{C_1C_3}\right\|$ la distance *rectiligne* entre les points C_1 et C_3.

Nous avons : $\overrightarrow{C_1C_3} = \overrightarrow{r_3} - \overrightarrow{r_1}$, donc :

$$c^2 = \left(\overrightarrow{\Delta_3} - \overrightarrow{R_3}\right)^2 - 2\left(\overrightarrow{\Delta_1} - \overrightarrow{R_1}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\Delta_3} - \overrightarrow{R_3}\right) + \left(\overrightarrow{\Delta_1} - \overrightarrow{R_1}\right)^2$$

Après développement, nous obtenons :

$$\boxed{c^2 = L\,\Delta_1^2 + M\,\Delta_1 + N}$$

avec
$$\begin{aligned} L &= (\lambda_1 - Q\lambda_3)^2 + (\mu_1 - Q\mu_3)^2 + (\nu_1 - Q\nu_3)^2 \\ M &= 2\left[(X_3 - X_1)(\lambda_1 - Q\lambda_3) + (Y_3 - Y_1)(\mu_1 - Q\mu_3) + (Z_3 - Z_1)(\nu_1 - Q\nu_3)\right] \\ N &= (X_3 - X_1)^2 + (Y_3 - Y_1)^2 + (Z_3 - Z_1)^2 \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement le système suivant :

$$\boxed{\begin{cases} r_1^2 = \Delta_1^2 - 2(\lambda_1 X_1 + \mu_1 Y_1 + \nu_1 Z_1)\Delta_1 + R_1^2 & (1) \\ r_3^2 = Q^2\Delta_1^2 - 2(\lambda_3 X_3 + \mu_3 Y_3 + \nu_3 Z_3)Q\,\Delta_1 + R_3^2 & (2) \\ c^2 = L\Delta_1^2 + M\,\Delta_1 + N & (3) \\ (r_1 + r_3 + c)^{3/2} - (r_1 + r_3 - c)^{3/2} = 6k(t_3 - t_1) & (4) \end{cases}}$$

avec $k = 0.017\ 202\ 098\ 95$ la constante de Gauss.

La dernière relation, appelée équation d'Euler, est démontrée à la fin de ce paragraphe (dont la lecture n'est pas indispensable). Contrairement aux trois premières relations qui ne sont que des formules de géométrie (bien que l'on utilisé la loi des aires pour *Q*), elle fait intervenir le rôle de la gravitation par l'intermédiaire de la constante de Gauss.

La résolution de ce système permet de connaître Δ_1, $\Delta_3 (= Q\Delta_1)$, r_1 et r_3, ce qui permet d'évaluer les éléments orbitaux de la comète.

Résolution du système :

Ce système dont les inconnues sont Δ_1, r_1, r_3 et c se résout par itérations successives grâce à la méthode de Newton.

Posons $\Delta_1 = 1$ ou 2. Nous pouvons alors déterminer r_1 et r_3. Connaissant *Q*, nous pouvons calculer une première valeur de *c*, grâce à l'équation (3).

Écrivons (4) sous la forme suivante :

$$(1+x)^{3/2} - (1-x)^{3/2} = \frac{6k(t_3 - t_1)}{(r_1 + r_3)^{3/2}} \quad \text{avec } x = \frac{c}{r_1 + r_3}$$

Faisons un développement limité du premier membre :

$$(1+x)^{3/2} - (1-x)^{3/2} = 3x\left(1 - \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{128}x^4 - \frac{3}{1024}x^6 - \ldots\right)$$

$$x\left(1 - \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{128}x^4 - \frac{3}{1024}x^6 - \ldots\right) = \frac{2k(t_3 - t_1)}{(r_1 + r_3)^{3/2}} = \varphi$$

En renversant la série, nous trouvons :

$$x = \varphi\left(1 + \frac{1}{24}\varphi^2 + \frac{5}{384}\varphi^4 + \frac{59}{9216}\varphi^6 + \ldots\right)$$

Nous trouvons ainsi une autre valeur de c, en général différente de la première.
Pour différentes valeurs de Δ_1 en progression arithmétique, on calcule le résidu entre les deux valeurs de c obtenues et cherchons par interpolation lorsque ce résidu s'annule.

Une fois que Δ_1 est connue, nous en obtenons $\Delta_3 = Q\Delta_1$, r_1 et r_3. Les éléments orbitaux se déduisent alors facilement des distances géocentriques et héliocentriques. Les formules sont données dans le paragraphe suivant.

Établissement de l'équation d'Euler :

L'équation d'Euler est valable uniquement dans le cas des orbites paraboliques.

Dans le triangle SC_1C_3, la longueur $c = C_1C_3$ est donnée par la relation d'Al–Kashi :

$$c^2 = r_1^2 + r_3^2 - 2r_1 r_3 \cos(v_3 - v_1)$$

$$\text{soit} \quad \boxed{\cos(v_3 - v_1) = \frac{r_1^2 + r_3^2 - c^2}{2r_1 r_3}}$$

Appliquant ensuite la formule : $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos x}{2}$, nous avons :

$$\cos^2\frac{v_3 - v_1}{2} = \frac{(r_1 + r_3)^2 - c^2}{4r_1r_3} = \frac{(r_1 + r_3 + c)(r_1 + r_3 - c)}{4r_1r_3}$$

or $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ donc :

$$\sin^2\frac{v_3 - v_1}{2} = \frac{c^2 - (r_3 - r_1)^2}{4r_1r_3} = \frac{(c - r_1 + r_3)(c + r_1 - r_3)}{4r_1r_3}$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\begin{aligned} \cos\frac{v_3 - v_1}{2} &= \frac{\sqrt{r_1 + r_3 + c}\sqrt{r_1 + r_3 - c}}{2\sqrt{r_1r_3}} \\ \sin\frac{v_3 - v_1}{2} &= \frac{\sqrt{c - r_1 + r_3}\sqrt{c + r_1 - r_3}}{2\sqrt{r_1r_3}} \end{aligned}}$$

or, pour une orbite parabolique,

$$r_1 = \frac{2q}{1 + \cos v_1} = \frac{q}{\cos^2\frac{v_1}{2}} \quad \text{et} \quad r_3 = \frac{q}{\cos^2\frac{v_3}{2}}$$

$$\text{donc} \quad \boxed{\cos^2\frac{v_1}{2} = \frac{q}{r_1} \quad \text{et} \quad \cos^2\frac{v_3}{2} = \frac{q}{r_3}}$$

Nous avons vu que la loi des aires pour le mouvement parabolique pouvait s'écrire sous la forme :

$$dt = \frac{2q^2}{C}\left(1 + s^2\right)ds = \frac{\sqrt{2}q^{3/2}}{k}\left(1 + s^2\right)ds$$

En intégrant entre t_1 et t_3,

$$t_3 - t_1 = \frac{\sqrt{2}q^{3/2}}{k}\left(s_3 + \frac{s_3^3}{3} - s_1 - \frac{s_1^3}{3}\right)$$

$$\frac{k}{\sqrt{2}q^{3/2}}(t_3 - t_1) = s_3 - s_1 + \frac{1}{3}\left(s_3^3 - s_1^3\right) = \frac{1}{3}(s_3 - s_1)\left(3 + s_1^2 + s_3^2 + s_1 s_3\right)$$

or $s = \tan\frac{\nu}{2} = \dfrac{\sin\frac{\nu}{2}}{\cos\frac{\nu}{2}}$

donc :

$$\frac{3k}{\sqrt{2}q^{1.5}}(t_3 - t_1) = \left(\tan\frac{\nu_3}{2} - \tan\frac{\nu_1}{2}\right)\left[3 + \tan^2\frac{\nu_1}{2} + \tan^2\frac{\nu_3}{2} + \tan\frac{\nu_1}{2}\tan\frac{\nu_3}{2}\right]$$

$$\frac{3k}{\sqrt{2}q^{1.5}}(t_3 - t_1) = \left(\frac{\sin\frac{\nu_3}{2}}{\cos\frac{\nu_3}{2}} - \frac{\sin\frac{\nu_1}{2}}{\cos\frac{\nu_1}{2}}\right)\left[1 + \frac{\sin^2\frac{\nu_1}{2}}{\cos^2\frac{\nu_1}{2}} + 1 + \frac{\sin^2\frac{\nu_3}{2}}{\cos^2\frac{\nu_3}{2}} + 1 + \frac{\sin\frac{\nu_1}{2}\sin\frac{\nu_3}{2}}{\cos\frac{\nu_1}{2}\cos\frac{\nu_3}{2}}\right]$$

Dans le second membre, nous effectuons les transformations suivantes :

- Nous réduisons le premier facteur au même dénominateur, le numérateur vaut alors :

$$\sin\frac{\nu_3 - \nu_1}{2}$$

- Dans le crochet, nous remplaçons $\sin^2\nu$ par $1 - \cos^2\nu$ et, remarquant que :

$$1 + \frac{\sin\frac{\nu_1}{2}\sin\frac{\nu_3}{2}}{\cos\frac{\nu_1}{2}\cos\frac{\nu_3}{2}} = \frac{\cos\frac{\nu_3 - \nu_1}{2}}{\cos\frac{\nu_1}{2}\cos\frac{\nu_3}{2}}$$

nous obtenons finalement :

$$\frac{3k}{\sqrt{2}q^{3/2}}(t_3 - t_1) = \frac{\sin\frac{\nu_3 - \nu_1}{2}}{\cos\frac{\nu_1}{2}\cos\frac{\nu_3}{2}}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{\nu_1}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{\nu_3}{2}} + \frac{\cos\frac{\nu_3 - \nu_1}{2}}{\cos\frac{\nu_1}{2}\cos\frac{\nu_3}{2}}\right)$$

Comme $\cos\frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{q}{r}}$, nous avons :

$$\frac{3k}{\sqrt{2}q^{3/2}}(t_3 - t_1) = \frac{\sqrt{r_1 r_3}\sin\frac{\nu_3 - \nu_1}{2}}{q}\left(\frac{r_1}{q} + \frac{r_3}{q} + \frac{\sqrt{r_1 + r_3 + c}\sqrt{r_1 + r_3 - c}}{2q}\right)$$

Cherchons maintenant une expression de q puis une nouvelle relation de $\sin\frac{\nu_3 - \nu_1}{2}$.

Nous avons vu que :

$$\cos\frac{\nu_1}{2} = \sqrt{\frac{q}{r_1}} \quad \text{et} \quad \cos\frac{\nu_3}{2} = \sqrt{\frac{q}{r_3}}$$

$$2\cos\frac{\nu_1}{2}\ \cos\frac{\nu_3}{2} = \cos\frac{\nu_1+\nu_3}{2} + \cos\frac{\nu_3-\nu_1}{2} = \frac{2q}{\sqrt{r_1 r_3}}$$

D'autre part, $\cos\nu_1 = \dfrac{2q}{r_1} - 1$ et $\cos\nu_3 = \dfrac{2q}{r_3} - 1$

D'où $\cos\nu_1 + \cos\nu_3 = 2\cos\dfrac{\nu_1+\nu_3}{2}\ \cos\dfrac{\nu_3-\nu_1}{2} = \dfrac{2q(r_1+r_3)}{r_1 r_3} - 2$

Ainsi $\cos\dfrac{\nu_3-\nu_1}{2}\left(\cos\dfrac{\nu_3+\nu_1}{2} + \cos\dfrac{\nu_3-\nu_1}{2}\right) = \dfrac{2q}{\sqrt{r_1 r_3}}\cos\dfrac{\nu_3-\nu_1}{2}$

$$\cos\frac{\nu_3-\nu_1}{2}\ \cos\frac{\nu_3+\nu_1}{2} = \frac{2q}{\sqrt{r_1 r_3}}\cos\frac{\nu_3-\nu_1}{2} - \cos^2\frac{\nu_3-\nu_1}{2} = \frac{q(r_1+r_3)}{r_1 r_3} - 1$$

Posons $w = \cos\dfrac{\nu_3-\nu_1}{2}$, alors nous avons :

$$\frac{2q}{\sqrt{r_1 r_3}} w - w^2 = \frac{q(r_1+r_3)}{r_1 r_3} - 1$$

$$q\left[\frac{2w\sqrt{r_1 r_3} - (r_1+r_3)}{r_1 r_3}\right] = w^2 - 1$$

$$q = \frac{r_1 r_3\left(1-w^2\right)}{r_1 + r_3 - 2w\sqrt{r_1 r_3}} = \frac{r_1 r_3 \sin^2\dfrac{\nu_3-\nu_1}{2}}{r_1 + r_3 - 2\sqrt{r_1 r_3}\cos\dfrac{\nu_3-\nu_1}{2}}$$

$$q = \frac{r_1 r_3 \sin^2\dfrac{\nu_3-\nu_1}{2}}{r_1 + r_3 - \sqrt{(r_1+r_3)^2 - c^2}} = \frac{2 r_1 r_3 \sin^2\dfrac{\nu_3-\nu_1}{2}}{\left(\sqrt{r_1+r_3+c} - \sqrt{r_1+r_3-c}\right)^2}$$

nous en déduisons que :

$$\sin\frac{\nu_3-\nu_1}{2} = \sqrt{\frac{q}{2 r_1 r_3}}\left(\sqrt{r_1+r_3+c} - \sqrt{r_1+r_3-c}\right)$$

Reprenons l'équation :

$$\frac{3k}{\sqrt{2}q^{3/2}}(t_3 - t_1) = \frac{\sqrt{r_1 r_3}\sin\dfrac{\nu_3-\nu_1}{2}}{q^2}\left(r_1 + r_3 + \frac{1}{2}\sqrt{r_1+r_3+c}\sqrt{r_1+r_3-c}\right)$$

$$\frac{6k\sqrt{q}}{\sqrt{2}}(t_3 - t_1) = \sqrt{\frac{q}{2}}\left(\sqrt{r_1+r_3+c} - \sqrt{r_1+r_3-c}\right)\left[2r_1 + 2r_3 + \sqrt{r_1+r_3+c}\sqrt{r_1+r_3-c}\right]$$

Soit en posant $\alpha = \sqrt{r_1 + r_3 + c}$ et $\beta = \sqrt{r_1 + r_3 - c}$,

$$6k(t_3 - t_1) = (\alpha - \beta)\left[\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta\right] = \alpha^3 - \beta^3$$

Nous avons finalement :

$$\boxed{6k(t_3 - t_1) = (r_1 + r_3 + c)^{3/2} - (r_1 + r_3 - c)^{3/2}}$$

Cette relation est valable si $\nu_3 - \nu_1$ est inférieur à 180°, ce qui est généralement le cas. Dans le cas contraire, la relation s'écrit :

$$6k(t_3 - t_1) = (r_1 + r_3 + c)^{3/2} + (r_1 + r_3 - c)^{3/2}$$

II. Organisation des calculs

Nous disposons de trois observations également espacées dans le temps ($t_1 < t_2 < t_3$ et $t_2 - t_1 \approx t_3 - t_2$) et des positions cartésiennes équatoriales du Soleil (coordonnées géométriques).

Dates	Positions de la comète	Coordonnées cartésiennes du Soleil
t_1	$\alpha_1 \quad \delta_1$	$X_1 \quad Y_1 \quad Z_1$
t_2	$\alpha_2 \quad \delta_2$	$X_2 \quad Y_2 \quad Z_2$
t_3	$\alpha_3 \quad \delta_3$	$X_2 \quad Y_3 \quad Z_3$

Nous avons $R_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}$ pour i variant de 1 à 3.

1. Nous calculons :

$$\overrightarrow{\eta_i} = \begin{pmatrix} \cos\delta_i \cos\alpha_i \\ \cos\delta_i \sin\alpha_i \\ \sin\delta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i \\ \mu_i \\ \nu_i \end{pmatrix}$$

puis le rapport des distances géocentriques :

$$Q = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} \frac{\overrightarrow{\eta_1} \cdot \left(\overrightarrow{\eta_2} \wedge \overrightarrow{R_2}\right)}{\overrightarrow{\eta_2} \cdot \left(\overrightarrow{\eta_3} \wedge \overrightarrow{R_2}\right)} \quad \text{avec } \overrightarrow{R_2} = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

$$\left(Q = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} \frac{\lambda_1 (\mu_2 Z_2 - \nu_2 Y_2) + \mu_1 (\nu_2 X_2 - \lambda_2 Z_2) + \nu_1 (\lambda_2 Y_2 - \mu_2 X_2)}{\lambda_2 (\mu_3 Z_2 - \nu_3 Y_2) + \mu_2 (\nu_3 X_2 - \lambda_3 Z_2) + \nu_2 (\lambda_3 Y_2 - \mu_3 X_2)} \right)$$

2. Nous résolvons ensuite le système à 4 inconnues par la méthode décrite plus haut :

$$\begin{cases} r_1^2 = \Delta_1^2 - 2(\lambda_1 X_1 + \mu_1 Y_1 + \nu_1 Z_1)\Delta_1 + R_1^2 \\ r_3^2 = Q^2\Delta_1^2 - 2(\lambda_3 X_3 + \mu_3 Y_3 + \nu_3 Z_3)Q\Delta_1 + R_3^2 \\ c^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 \\ (r_1 + r_3 + c)^{3/2} - (r_1 + r_3 - c)^{3/2} = 6k(t_3 - t_1) \end{cases}$$

3. Nous corrigeons les données observationnelles de l'aberration et de la parallaxe. Pour cela, nous remplaçons t_i par $t_i' = t_i - 0.005\,775\,5183\Delta_i$. Nous ne connaissons pas Δ_2 mais nous pouvons l'estimer par interpolation linéaire :

$$\Delta_2 = \Delta_1 + (t_2 - t_1)\frac{\Delta_3 - \Delta_1}{t_3 - t_1}$$

$$\alpha'_i = \alpha_i + \frac{\pi_S\ \rho\cos\varphi'\sin H}{\Delta_i\cos\delta_i} \quad \text{avec} \quad \pi_S = 8.794''$$

$$\delta'_i = \delta_i + \frac{\pi_S}{\Delta_i}\left(\rho\sin\varphi'\cos\delta_i - \rho\cos\varphi'\sin\delta_i\cos H\right)$$

où H est l'angle horaire de la comète, c'est-à-dire $H = TS - \alpha_i$, avec TS le temps sidéral local.

4. Nous répétons les étapes 2 et 3 jusqu'à l'obtention de nouvelles valeurs de Δ_1, Δ_3, r_1 et r_3 stables.

5. Nous déterminons ensuite pour i = 1 et i = 3 :

$$\vec{r_i}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i\Delta_i - X_i \\ \mu_i\Delta_i - Y_i \\ \nu_i\Delta_i - Z_i \end{pmatrix}$$

6. Puis :

$$\vec{r'_i}\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i\cos\varepsilon + z_i\sin\varepsilon \\ -y_i\sin\varepsilon + z_i\cos\varepsilon \end{pmatrix}$$

où ε est l'obliquité de l'écliptique. Si les coordonnées sont rapportées à l'équinoxe J2000.0 alors ε a la valeur fixe de 23°26'21.448".

7. Et le vecteur $\vec{C} = \vec{r'_1} \wedge \vec{r'_3}$:

$$\vec{C}\begin{pmatrix} C_x = y'_1 z'_3 - y'_3 z'_1 \\ C_y = z'_1 x'_3 - z'_3 x'_1 \\ C_z = x'_1 y'_3 - x'_3 y'_1 \end{pmatrix}$$

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}$$

8. L'inclinaison i de l'orbite de l'astre est donnée par :

$$i = \arccos\frac{C_z}{C}$$

9. La longitude du nœud ascendant Ω :

$$\Omega = \arctan\left(-\frac{C_x}{C_y}\right)$$

si $C_y > 0$, alors il faut ajouter 180° à Ω.

10. Des relations

$$r\sin(\nu + \omega) = \frac{z'}{\sin i} \qquad\qquad r\cos(\nu + \omega) = x'\cos\Omega + y'\sin\Omega$$

nous obtenons $\nu_1 + \omega$ et $\nu_3 + \omega$, d'où, par différence, $\nu_3 - \nu_1$. Si $x'\cos\Omega + y'\sin\Omega < 0$, ajouter 180° à $\nu + \omega$.

11. Calcul de la distance au périhélie q, par l'une de ces deux formules :

$$q = \frac{r_1 r_3 \sin^2\frac{\nu_3 - \nu_1}{2}}{r_1 + r_3 - 2\sqrt{r_1 r_3}\cos\frac{\nu_3 - \nu_1}{2}} = \frac{\sqrt{r_1 r_3}\cos^2\frac{\nu_3 - \nu_1}{4}}{1 + \frac{\left(\sqrt{r_3} - \sqrt{r_1}\right)^2}{4\sqrt{r_1 r_3}\sin^2\frac{\nu_3 - \nu_1}{4}}}$$

12. Calcul de l'argument du périhélie ω :

$$\sin\frac{v_3+v_1}{2}\ \sin\frac{v_3-v_1}{2}=\frac{q(r_3-r_1)}{r_1r_3}$$
$$\cos\frac{v_3+v_1}{2}\ \cos\frac{v_3-v_1}{2}=\frac{q(r_3+r_1)}{r_1r_3}-1$$

Nous en déduisons v_3+v_1 et par suite v_1, v_3 et ω.

13. Le passage au périhélie T_0 est donné par :

$$s=\tan\left(\frac{v_1}{2}\right)$$

$$T_0=t_1'-\frac{\sqrt{2}\ q^{3/2}}{k}\left(\frac{s^3}{3}+s\right)$$

III. Exemple de calcul appliquant la méthode d'Olbers

Nous avons les coordonnées astrométriques rapportées à l'équinoxe J2000.0 d'une comète pour les dates à 0h UTC :

Dates	Positions de la comète		Coordonnées équatoriales cartésiennes du Soleil		
	α	δ	X	Y	Z
2 mars 2006	21h37m58.9s	+54°02' 04"	+0.938 063 520	–0.293 306 263	–0.127 160 491
12 mars 2006	22h06m20.5s	+53°58' 27"	+0.981 823 400	–0.139 609 052	–0.060 525 238
22 mars 2006	22h32m33.0s	+53°53' 46"	+0.996 111 910	+0.018 235 807	+0.007 900 704

Remarque : nous avons pris des coordonnées du Soleil très précises, issues des series96 déjà mentionnées précédemment. De plus, nous conserverons volontairement des décimales supplémentaires dans les calculs intermédiaires.

1. Les coordonnées de la comète doivent être toutes mises en degrés pour calculer les $\overrightarrow{\eta_i}$:

$$\overrightarrow{\eta_1}\begin{pmatrix}\lambda_1=0.478\,101\,776\\ \mu_1=-0.341\,084\,390\\ \nu_1=0.809\,370\,206\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{\eta_2}\begin{pmatrix}\lambda_2=0.517\,294\,055\\ \mu_2=-0.279\,870\,034\\ \nu_2=0.808\,751\,893\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{\eta_3}\begin{pmatrix}\lambda_3=0.546\,872\,354\\ \mu_3=-0.219\,425\,617\\ \nu_3=0.807\,949\,891\end{pmatrix}$$

$$Q=\frac{t_3-t_2}{t_2-t_1}\,\frac{\lambda_1(\mu_2Z_2-\nu_2Y_2)+\mu_1(\nu_2X_2-\lambda_2Z_2)+\nu_1(\lambda_2Y_2-\mu_2X_2)}{\lambda_2(\mu_3Z_2-\nu_3Y_2)+\mu_2(\nu_3X_2-\lambda_3Z_2)+\nu_2(\lambda_3Y_2-\mu_3X_2)}=1.035\,862\,692$$

2. Résolution du système :

Nous posons $\varepsilon=c_2-c_1$ en utilisant les valeurs successives pour Δ_1 2, 3 et 4 UA. Nous obtenons les valeurs suivantes de ε :

$$\varepsilon_1=-0.200\,668$$
$$\varepsilon_2=-0.080\,557$$
$$\varepsilon_3=0.075\,734$$

Par interpolation, nous trouvons la valeur corrigée de Δ_1 :

$$\Delta_1=3.544\,141\,360$$

Nous trouvons ensuite en prenant des intervalles plus petits $\Delta_1\pm0.1$; $\Delta_1\pm0.001$:

$$\Delta_1=3.525\,656\,305$$
$$\Delta_1=3.525\,661\,012$$

En examinant la valeur du facteur d'interpolation, nous conserverons cette dernière valeur de Δ_1.

3. Comme les données observationnelles sont géocentriques, la correction de parallaxe est inutile.

4. Nous gardons les valeurs suivantes pour Δ_1, Δ_3, r_1 et r_3 :

$$\Delta_1 = 3.525\,661\,012$$
$$\Delta_3 = 3.652\,100\,708$$
$$r_1 = 3.205\,686\,308$$
$$r_3 = 3.215\,671\,554$$

5. Calcul de $\vec{r_1}$ et $\vec{r_3}$:

$$\vec{r_1} = \begin{pmatrix} x_1 = 0.747\,561\,271 \\ y_1 = -0.909\,241\,672 \\ z_1 = 2.981\,534\,842 \end{pmatrix} \qquad \vec{r_3} = \begin{pmatrix} x_3 = 1.001\,121\,003 \\ y_3 = -0.819\,600\,260 \\ z_3 = 2.943\,650\,590 \end{pmatrix}$$

6. Calcul de $\vec{r_1'}$ et $\vec{r_3'}$:

$$\vec{r_1'} \begin{pmatrix} 0.747\,561\,271 \\ 0.352\,200\,730 \\ 3.097\,128\,083 \end{pmatrix} \qquad \vec{r_3'} \begin{pmatrix} 1.001\,121\,003 \\ 0.419\,365\,829 \\ 3.026\,703\,237 \end{pmatrix}$$

l'obliquité de l'écliptique valant $\varepsilon = 23°26'21.448''$

7. Calcul du vecteur $\vec{C} = \vec{r_1'} \wedge \vec{r_3'}$

$$\vec{C} \begin{pmatrix} C_x = -0.233\,149\,399 \\ C_y = 0.838\,330\,349 \\ C_z = -0.038\,935\,797 \end{pmatrix}$$

$$C = 0.871\,018\,033$$

8. Inclinaison orbitale i :

$$i = 92.562\,060°$$

9. Longitude du nœud ascendant Ω :

$$\Omega = 195.541\,866°$$

10. Calcul de $v_1 + \omega$ et $v_3 + \omega$:

$$v_1 + \omega = 104.727\,790°$$
$$v_3 + \omega = 109.592\,896°$$
$$v_3 - v_1 = 4.865\,106°$$

11. Calcul de la distance au périhélie q :

$$q = 3.204\,928 \text{ UA}$$

12. Calcul de l'argument du périhélie ω :

$$v_1 + v_3 = 8.389\,109°$$
$$v_1 = 1.762\,001°$$
$$\omega = 102.965\,788°$$

13. Passage au périhélie T_0 :

$$s_1 = 0.015\,377$$
$$T_0 = 2\,453\,789.24666$$

Regroupons les éléments orbitaux trouvés par la méthode d'Olbers :

$$T_0 = 2\,453\,789.24666$$
$$q = 3.204\,928 \text{ UA}$$
$$i = 92.562\,060°$$
$$\omega = 102.965\,788°$$
$$\Omega = 195.541\,866°$$

Les coordonnées fournies dans cet exemple sont celles de la comète Christensen C/2005 B1, dont les éléments orbitaux, calculés à partir de nombreuses observations (et corrigés des perturbations planétaires), sont donnés pour le 2 juillet 2006 à 0h TT :

$$T_0 = 2\,453\,790.09754$$
$$q = 3.205\,4546 \text{ UA}$$
$$i = 92.548\,69°$$
$$\omega = 103.176\,89°$$
$$\Omega = 195.557\,73°$$
$$e = 1.000\,5498$$

Nous avons une différence de 0.85088 jour pour la date du passage au périhélie, c'est-à-dire une différence de 20h 25 minutes. La valeur de q obtenue par la méthode est correcte. Les écarts angulaires sont ici minimes et sont dus au fait que nous avons utilisé uniquement trois positions pour établir les éléments orbitaux. L'orbite de cette comète n'est pas tout à fait parabolique, ce qui est probablement à l'origine de l'écart assez important dans la date du périhélie. Néanmoins, les éléments trouvés ici permettent d'établir une éphéméride suffisamment précise pour suivre la comète. Étant donné que le passage au périhélie se fait le 23 février 2006, utiliser des coordonnées qui correspondent à des dates après celles dont nous nous sommes servis aurait donné des éléments moins précis. Il faut donc, pour que les résultats soient le plus précis possible, que les dates d'observation se trouvent lorsque l'astre se trouve au voisinage du périhélie.