Cosmologie

I. Cosmologie newtonienne

Les équations de la mécanique classique permettent d'élaborer un modèle simple d'Univers. Nous allons écrire les relations mettant en jeu l'énergie et la loi fondamentale de la dynamique sous une certaine forme, de manière à pouvoir les comparer plus loin avec les équations de la cosmologie basée sur la Relativité Générale.

Considérons que l'ensemble de l'Univers est approximativement sphérique de rayon *R* (pouvant varier avec le temps) et de masse *M* (conservée au cours du temps). Une particule de masse *m* située à sa surface possède une énergie totale, qui est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle :

$$E = E_c + E_p$$

L'énergie cinétique s'écrit $E_c = \frac{1}{2} m\dot{R}^2$ tandis que l'énergie potentielle, uniquement due à la gravitation, est donnée par :

$$E_p = -\frac{GMm}{R}$$

On a alors :

$$\frac{2E}{m} = \dot{R}^2 - \frac{2GM}{R}$$

Si ρ est la masse volumique de l'Univers, on a $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$, ce qui entraîne :

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{2E}{mR^2}$$

Si on pose $k = -\frac{2E}{mc^2}$, on obtient finalement :

$$\boxed{\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{R^2}}$$

Cette particule subit uniquement une force gravitationnelle, donc, d'après la troisième loi de Newton :

$$F = m\ddot{R} = -\frac{GMm}{R^2}$$

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2} = -\frac{4\pi GR}{3}\rho$$

$$\boxed{\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}\rho}$$

Une dernière équation est obtenue grâce à la conservation de la masse :

$$\frac{dM}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi \rho R^3\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\rho R^3\right) = 0}$$

Les deux premières équations encadrées ne sont pas indépendantes l'une de l'autre. En effet,

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 - kc^2$$

$$\frac{d}{dt}\dot{R}^2 = 2\dot{R}\ddot{R} = \frac{8\pi G}{3}\frac{d}{dt}\left(\rho R^2\right) = \frac{8\pi G}{3}\left(R^2\dot{\rho} + 2R\dot{R}\rho\right)$$

L'équation de la conservation de la masse peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{\rho} = -\frac{3\dot{R}\rho}{R}$$

Donc :

$$\dot{R}\ddot{R} = \frac{4\pi G}{3}\left(-3R\dot{R}\rho + 2R\dot{R}\rho\right) = -\frac{4\pi G}{3}R\dot{R}\rho$$

Soit finalement :

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}\rho$$

La cosmologie newtonienne pose d'emblée de nombreux problèmes que Newton lui-même avait soulevés. Si l'Univers est uniquement soumis à la gravitation, il devrait être en train de se contracter. Il a émis trois hypothèses :

- l'Univers est infini et uniformément peuplé d'étoiles,
- ou l'Univers est en expansion,
- ou l'Univers n'est pas très vieux et n'a pas commencé sa phase de contraction.

Bien que ces hypothèses répondent aux exigences que l'Univers impose, il subsiste néanmoins un problème émis pour la première fois par Halley (le même que la comète!) et formulé plus précisément par Olbers. Il s'agit d'expliquer la noirceur du ciel nocturne (paradoxe d'Olbers). Ce résultat n'est pas prévu par la cosmologie newtonienne. En effet, quelle que soit la direction dans laquelle on regarde, on trouve forcément une étoile plus ou moins éloignée de nous, et l'ensemble de toutes les étoiles apporte sa contribution à la luminosité du ciel. Le ciel nocturne devrait avoir une luminosité uniforme, de l'ordre de celle du Soleil, ce qui n'est évidemment pas observé.

II. Métrique de Robertson-Walker

L'une des applications de la Relativité Générale est de construire des modèles d'Univers. Rappelons tout d'abord les équations de la Relativité Générale formulées par Einstein.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \qquad (1)$$

où le tenseur $T_{\mu\nu}$ est défini de la manière suivante :

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho c^2 + p\right)u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}$$

En multipliant (1) par $g^{\mu\nu}$, nous pouvons mettre les équations d'Einstein sous une forme alternative.

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$$

Sachant que $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R$ et $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$:

$$R = \frac{8\pi G}{c^4}T + 4\Lambda$$

En remplaçant dans (1), on obtient :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\frac{8\pi G}{c^4}T + 4\Lambda\right) + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)$$

En posant $S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T$:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}S_{\mu\nu}}$$

En admettant que l'Univers est homogène et isotrope à grande échelle et que le temps s'écoule de la même manière en tout point de l'Univers, nous pouvons établir la forme de la métrique :

$$ds^2 = c^2dt^2 - U(r,t)dr^2 - V(r,t)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

où U et V sont des quantités à déterminer. Les composantes du tenseur métrique s'écrivent alors :

$$g_{11} = -U \qquad g_{22} = -V \qquad g_{33} = -V\sin^2\theta \qquad g_{44} = 1$$
$$g^{11} = -\frac{1}{U} \qquad g^{22} = -\frac{1}{V} \qquad g^{33} = -\frac{1}{V\sin^2\theta} \qquad g^{44} = 1$$

Sachant que les symboles de Cristoffel s'écrivent $\Gamma_{\mu}{}^{\beta}{}_{\nu} = \frac{1}{2}g^{\beta\sigma}\left(\partial_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right)$, nous en déduisons les composantes de Cristoffel non nulles, en posant $U' = \frac{\partial U}{\partial r}$ et $\dot{U} = \frac{\partial U}{c\,\partial t}$:

$$\Gamma_1{}^1{}_1 = \frac{U'}{2U} \qquad \Gamma_2{}^1{}_2 = -\frac{V'}{2U} \qquad \Gamma_3{}^1{}_3 = -\frac{V'}{2U}\sin^2\theta \qquad \Gamma_1{}^1{}_4 = \frac{\dot{U}}{2U}$$

$$\Gamma_1{}^2{}_2 = \frac{V'}{2V} \qquad \Gamma_2{}^2{}_4 = \frac{\dot{V}}{2V} \qquad \Gamma_2{}^2{}_3 = -\frac{1}{2}\sin 2\theta \qquad \Gamma_3{}^3{}_1 = \frac{V'}{2V}$$

$$\Gamma_3{}^3{}_4 = \frac{\dot{V}}{2V} \qquad \Gamma_2{}^3{}_3 = \mathrm{cotan}\,\theta \qquad \Gamma_1{}^4{}_1 = \frac{\dot{U}}{2} \qquad \Gamma_2{}^4{}_2 = \frac{\dot{V}}{2} \qquad \Gamma_3{}^4{}_3 = \frac{\dot{V}}{2}\sin^2\theta$$

et les composantes du tenseur de Ricci :

$$R_{11} = \frac{V''}{V} - \frac{V'^2}{2V^2} - \frac{U'V'}{2UV} - \frac{\ddot{U}}{2} - \frac{\dot{U}\dot{V}}{2V} + \frac{\dot{U}^2}{4U}$$

$$R_{22} = -1 + \frac{V''}{2U} - \frac{U'V'}{4U^2} - \frac{\ddot{V}}{2} - \frac{\dot{U}\dot{V}}{4U}$$

$$R_{33} = R_{22}\sin^2\theta$$

$$R_{44} = \frac{\ddot{U}}{2U} + \frac{\ddot{V}}{V} - \frac{\dot{U}^2}{4U^2} - \frac{\dot{V}^2}{2V^2}$$

$$R_{14} = \frac{\dot{V}'}{V} + \frac{V'\dot{V}}{2V^2} - \frac{\dot{U}V'}{2UV}$$

L'Univers est considéré comme un fluide dont chacune de ses particules possède une certaine vitesse. Si on se place dans le référentiel formé par l'une de ces particules, on est dans un référentiel comobile. Dans ce cas, on a $g_{it} = 0$, $u^i = 0$ donc $R_{it} = 0$, en particulier $R_{14} = \frac{\dot{V}'}{V} + \frac{V'\dot{V}}{2V^2} - \frac{\dot{U}V'}{2UV} = 0$. On pose :

$$
\begin{aligned}
U(r,t) &= R^2(t) f(r) \\
V(r,t) &= S^2(t) g(r)
\end{aligned}
$$

On a alors : $U' = R^2 f'$ $\quad \dot{U} = 2fR\dot{R}$ $\quad V' = S^2 g'$ $\quad \dot{V} = 2gS\dot{S}$ $\quad \dot{V}' = 2S\dot{S}g'$

ce qui entraîne : $2\frac{\dot{S}}{S}\frac{g'}{g} - \frac{\dot{S}}{S}\frac{g'}{g} - \frac{\dot{R}}{R}\frac{g'}{g} = 0$, soit $\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{S}}{S}$. On a ainsi $R = S$ donc $V = R^2(t) g(r)$.

On peut poser $g(r) = r^2$. Pour une pression nulle, les composantes de $S_{\mu\nu}$ s'écrivent :

$$
S_{11} = \rho c^2 \frac{U}{2} \qquad S_{22} = \rho c^2 \frac{V}{2} \qquad S_{33} = S_{22} \sin^2\theta \qquad S_{44} = \frac{1}{2}\rho c^2
$$

En identifiant $R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}$ (pour une constante cosmologique nulle), nous avons :

$$
\begin{aligned}
& R_{11} = -\frac{8\pi G}{c^4} S_{11} \\
& -\frac{f'}{rf^2} - \ddot{R}R - 2\dot{R}^2 = -\frac{4\pi G}{c^2}\rho R^2 \\
& -\frac{f'}{rf^2} = -\frac{4\pi G}{c^2}\rho R^2 + \ddot{R}R + 2\dot{R}^2 = -2k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& R_{22} = -\frac{8\pi G}{c^4} S_{22} \\
& -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 f} - \frac{f'}{2rf} = -\frac{4\pi G}{c^2}\rho R^2 + \ddot{R}R + 2\dot{R}^2 = -2k
\end{aligned}
$$

Nous avons ainsi :

$$
\begin{aligned}
& \frac{f'}{rf^2} = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 f} - \frac{f'}{2rf} = -2k \\
& -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 f} = -k
\end{aligned}
$$

soit :

$$
f(r) = \frac{1}{1 - kr^2}
$$

La métrique s'écrit finalement :

$$\boxed{ds^2 = c^2dt^2 - R^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2d\Omega^2\right)}$$

appelée métrique de Robertson-Walker, où R est appelé facteur d'échelle, qui caractérise l'évolution de la métrique au cours du temps, nommé improprement rayon de l'Univers. k est le facteur de courbure et ne peut prendre que 3 valeurs suivant la géométrie de l'Univers :

- $k = 0$: l'espace-temps est plat (modèle euclidien)
- $k = 1$: l'espace-temps a une courbure positive (modèle elliptique)
- $k = -1$: l'espace-temps a une courbure négative (modèle hyperbolique)

Remarques :

- Si nous avions pris une pression non nulle, cela n'aurait pas changé le résultat.
- Le paramètre r est ici sans dimension et son intervalle de définition s'étend de zéro à un.

III. Équations de Friedmann-Lemaître

À partir de la métrique de Robertson-Walker, nous pouvons déterminer les équations de Friedmann-Lemaître. Nous avons vu que :

$$R_{11} = \frac{V''}{V} - \frac{V'^2}{2V^2} - \frac{U'V'}{2UV} - \frac{\ddot{U}}{2} - \frac{\dot{U}\dot{V}}{2V} + \frac{\dot{U}^2}{4U}$$

Maintenant que U et V sont connus, nous obtenons :

$$R_{11} = -\frac{1}{1-kr^2}\left(2k + \frac{2\dot{R}^2}{c^2} + \frac{R\ddot{R}}{c^2}\right)$$

D'autre part, la composante T_{11} du tenseur d'énergie-impulsion s'écrit, en se plaçant en coordonnées comobiles :

$$T_{11} = -pg_{11} = \frac{pR^2}{1-kr^2}$$

$$T = g^{11}T_{11} + g^{22}T_{22} + g^{33}T_{33} + g^{44}T_{44}$$

$$T = \rho c^2 - 3p$$

On a donc, en identifiant $R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)$:

$$-\frac{1}{1-kr^2}\left(2k + \frac{2\dot{R}^2}{c^2} + \frac{R\ddot{R}}{c^2}\right) + \frac{\Lambda R^2}{1-kr^2} = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(\frac{pR^2}{1-kr^2} + \frac{1}{2}\frac{R^2}{1-kr^2}\left(\rho c^2 - 3p\right)\right)$$

$$2\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{4\pi G}{c^2}\left(\rho c^2 - p\right) - \frac{2kc^2}{R^2} + \Lambda c^2 - \frac{\ddot{R}}{R} \qquad (2)$$

On a de même :

$$R_{44} = \frac{\ddot{U}}{2U} + \frac{\ddot{V}}{V} - \frac{\dot{U}^2}{4U^2} - \frac{\dot{V}^2}{2V^2}$$

$$R_{44} = \frac{3\ddot{R}}{c^2R} \qquad \text{et} \qquad T_{44} = \rho c^2$$

Alors :

$$\frac{3\ddot{R}}{c^2R}-\Lambda=-\frac{8\pi G}{c^4}\left(\rho c^2-\frac{1}{2}\left(\rho c^2-3p\right)\right)$$

$$\frac{\ddot{R}}{R}=-\frac{4\pi G}{3c^2}\left(\rho c^2+3p\right)+\frac{\Lambda c^2}{3}$$

En injectant cette dernière relation dans (2), on trouve :

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2}=\frac{8\pi G}{3}\rho-\frac{kc^2}{R^2}+\frac{\Lambda c^2}{3}$$

Les deux équations obtenues sont appelées équations de Friedmann-Lemaître ou équations de la cosmologie :

$$\boxed{\frac{\ddot{R}}{R}=-\frac{4\pi G}{3c^2}\left(\rho c^2+3p\right)+\frac{\Lambda c^2}{3}} \qquad \boxed{\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2=H^2=\frac{8\pi G\rho}{3}-\frac{kc^2}{R^2}+\frac{\Lambda c^2}{3}}$$

Nous pouvons remarquer que les équations de la cosmologie issues de la Relativité Générale sont plus complètes car elles tiennent compte de la pression. Un nouveau terme est apparu, la constante cosmologique, qui tient un rôle important dans les modèles évolutifs actuels. Notons toutefois que dans le cas présent aucune hypothèse n'est faite quant à la forme de l'Univers et que R ne représente pas le "rayon" de l'Univers, mais simplement un facteur de dilatation.
Le paramètre H est le paramètre de Hubble : il s'agit du taux relatif d'expansion de l'Univers, généralement donné en kilomètres par seconde et par mégaparsec (km/s/Mpc).

Déterminons maintenant l'équation de conservation. On sait que la dérivée covariante du tenseur d'énergie-impulsion est nulle :

$$\begin{aligned}
&\nabla_\mu T^{\mu\nu}=0\\
&\nabla_\mu\left(\left(\rho c^2+p\right)u^\mu u^\nu-pg^{\mu\nu}\right)=0\\
&\nabla_\mu\left(\left(\rho c^2+p\right)u^\mu u^\nu\right)-\nabla_\mu\left(pg^{\mu\nu}\right)=0\\
&\partial_\mu\left(\left(\rho c^2+p\right)u^\mu u^\nu\right)+\left(\rho c^2+p\right)\Gamma^\mu_{\mu\ \sigma}u^\sigma u^\nu\\
&\qquad+\left(\rho c^2+p\right)\Gamma^\nu_{\mu\ \sigma}u^\mu u^\sigma-g^{\mu\nu}\partial_\mu p=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\partial_4\left(\rho c^2+p\right)+\left(\rho c^2+p\right)\left(\Gamma^\mu_{\mu\ 4}u^\nu+\Gamma^\nu_{4\ 4}\right)-\partial_4 p=0\\
&\frac{d\left(\rho c^2\right)}{c\,dt}+\left(\rho c^2+p\right)\left(\Gamma^1_{1\ 4}+\Gamma^2_{2\ 4}+\Gamma^3_{3\ 4}\right)=0\\
&\frac{d\left(\rho c^2\right)}{c\,dt}+\left(\rho c^2+p\right)\frac{3\dot{R}}{cR}=0
\end{aligned}$$

On ajoute $\dot{p}$ à chaque membre et on multiplie par R^3 :

$$R^3\frac{d\left(\rho c^2+p\right)}{dt}+3\left(\rho c^2+p\right)\dot{R}R^2=\dot{p}R^3$$

$$\frac{d}{dt}\left[R^3\left(\rho c^2+p\right)\right]=\dot{p}R^3$$

$$\frac{d}{dR}\left[R^3\left(\rho c^2+p\right)\right]=\frac{dp}{dR}R^3$$

$$\frac{d}{dR}\left(\rho c^2R^3\right)+\frac{d}{dR}\left(pR^3\right)=\frac{dp}{dR}R^3$$

$$\boxed{\frac{d}{dR}\left(\rho c^2R^3\right)=-3pR^2}$$

On pourra noter, par rapport à l'équation classique, l'introduction de la pression p qui était jusqu'alors considérée comme négligeable. L'équation écrite ici nous apprend que la densité ρ décroît au moins aussi vite que R^{-3}.

Calculons maintenant le facteur d'échelle pour des époques proches de l'époque actuelle (celle-ci étant notée avec un indice zéro). Pour cela, faisons un développement limité de R :

$$R(t_1) = R(t_0) + (t_1 - t_0)\dot{R}(t_0) + \frac{1}{2}(t_1 - t_0)^2 \ddot{R}(t_0) + \ldots$$

$$R(t_1) = R(t_0)\left[1 - (t_0 - t_1)\frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} + \frac{1}{2}(t_0 - t_1)^2 \frac{\ddot{R}(t_0)}{R(t_0)} + \ldots\right]$$

En posant $q_0 = -\frac{\ddot{R}(t_0)R(t_0)}{\dot{R}^2(t_0)}$, appelé facteur de décélération, on obtient :

$$R(t_1) = R(t_0)\left[1 - (t_0 - t_1)H_0 - \frac{1}{2}(t_0 - t_1)^2 q_0 H_0^2 + \ldots\right]$$

Un photon émis par une galaxie suit une trajectoire radiale et vérifie :

$$ds = 0$$

c'est-à-dire :

$$c\,dt = \frac{R(t)dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

$$c\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = f(r_1)$$

Le train d'onde suivant est émis à l'instant $t_1 + \delta t_1$ et il est reçu à $t_0 + \delta t_0$:

$$c\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{R(t)} = f(r_1)$$

Les quantités δt_1 et δt_0 sont petites devant t_1 et t_0 donc :

$$\frac{\delta t_1}{\delta t_0} = \frac{R(t_1)}{R(t_0)}$$

Or la fréquence est donnée par $\nu = \frac{c}{\delta t}$, on a ainsi :

$$\frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{R(t_0)}{R(t_1)}$$

On définit le décalage spectral par $z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1}$, avec λ la longueur d'onde. Il s'écrit encore :

$$z = \frac{\nu_1}{\nu_0} - 1 = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} - 1$$

Soit :

$$\boxed{1 + z = \frac{R(t_0)}{R(t_1)}}$$

On obtient, avec ce qu'on a écrit plus haut :

$$1 + z = \left[1 - (t_0 - t_1)H_0 - \frac{1}{2}(t_0 - t_1)^2 q_0 H_0^2 + \ldots\right]^{-1}$$

$$z = (t_0 - t_1)H_0 + (t_0 - t_1)^2\left(\frac{1}{2}q_0 + 1\right)H_0^2 + ...$$

Le photon a parcouru la distance d telle que :

$$d = c(t_0 - t_1)$$

Ainsi :

$$cz = H_0 d + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}q_0 + 1\right)H_0^2 d^2 + ...$$

Au premier ordre, nous avons la loi de Hubble :

$$\boxed{cz = H_0 d}$$

Établissons maintenant les relations mettant en jeu le facteur de décélération. Celui-ci, à l'instant présent, s'écrit :

$$q_0 = -\left(\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2}\right)_0 = -\frac{\ddot{R}_0}{R_0}\frac{1}{H_0^2}$$

On a ainsi :

$$\frac{\ddot{R}_0}{R_0} = -q_0 H_0^2 = -\frac{4\pi G}{3c^2}\left(\rho_0 c^2 + 3p_0\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Et d'autre part :

$$H_0^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3} - \frac{kc^2}{R_0^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

On peut former la quantité $(2q_0 - 1)H_0^2$:

$$(2q_0 - 1)H_0^2 = \frac{kc^2}{R_0^2} + \frac{8\pi G}{c^2}p_0 - \Lambda c^2$$

Résumons ci-après les relations importantes, utiles aussi bien dans les modèles statiques que dans les modèles évolutifs :

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\left(\rho c^2 + 3p\right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \qquad \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

$$\frac{d}{dR}\left(\rho c^2 R^3\right) = -3pR^2 \qquad q = -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2}$$

$$(2q_0 - 1)H_0^2 = \frac{kc^2}{R_0^2} + \frac{8\pi G}{c^2}p_0 - \Lambda c^2$$

IV. Modèles statiques

Bien que non vérifiés par l'observation, les modèles d'Univers statiques sont des solutions des équations de la cosmologie et constituent des sujets intéressants à étudier. Ils sont vérifiés pour $\dot{R} = 0$ et $\ddot{R} = 0$. En 1917, Einstein élabora un modèle statique, sans constante cosmologique :

$$0 = -\frac{4\pi G}{3c^2}\left(\rho c^2 + 3p\right) \qquad\qquad 0 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{R^2}$$

Il obtenait donc, d'après la première équation, $\rho c^2 = -3p$, ce qui était physiquement inacceptable. Il introduisit alors la constante cosmologique pour obtenir le résultat ci-dessous :

$$0 = -\frac{4\pi G}{3c^2}\left(\rho c^2 + 3p\right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \qquad\qquad 0 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

La constante cosmologique apparaît comme une force de répulsion : $\Lambda = \frac{4\pi G}{c^2}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)$ et doit être une quantité positive et donc :

$$k = \frac{4\pi G R^2}{3c^2}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)$$

ce qui impose d'avoir $k = 1$ pour une masse volumique et une pression toutes deux différentes de zéro, les quantités du second membre étant toutes positives. La métrique de l'Univers d'Einstein s'écrit :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2\left[\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2\right]$$

où R n'est pas fonction du temps. On peut aussi calculer son volume :

$$dV = \frac{R}{\sqrt{1-r^2}} dr \cdot R\, r d\theta \cdot R\, r \sin\theta\, d\varphi$$

$$dV = R^3 \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

D'où :

$$V = R^3 \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$V = \pi^2 R^3$$

Ce modèle fut abandonné par son auteur en 1923.

III. Modèle évolutif de Friedmann-Lemaître

En prenant les équations complètes, on peut établir un modèle d'Univers dont les caractéristiques ressemblent à notre Univers :

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\left(\rho c^2 + 3p\right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \qquad \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

À l'instant présent, elles s'écrivent :

$$\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right)_0 = -\frac{4\pi G}{3c^2}\left(\rho_0 c^2 + 3p_0\right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \qquad \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)_0^2 = H_0^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3} - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

En posant $\Omega_m = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_0 = \frac{\rho_0}{\rho_c}$ $\qquad \Omega_k = -\frac{kc^2}{H_0^2 R_0^2}$ $\qquad$ et $\qquad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}$, on obtient l'équation simplifiée :

$$\boxed{\Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1}$$

En définissant le facteur de décélération q par $q = -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} = -\frac{\ddot{R}}{R}\frac{1}{H^2}$, on a :

$$q_0 = \frac{1}{2}\Omega_m\left(1 + 3\frac{p_0}{c^2}\right) - \Omega_\Lambda$$

Selon des mesures de 1999, on trouve $p << \rho c^2$, $\qquad \Omega_k \approx 0 \qquad \Omega_m \approx 0.35$

On en déduit $\Omega_\Lambda \approx 0.65 \qquad \Lambda \approx 1.12 \times 10^{-52}$ m^{-2} $\qquad$ et $\qquad q_0 = -0.475$.

Selon ces mesures, l'Univers serait en expansion accélérée, plat (sans courbure k = 0), avec une contribution de la matière très supérieure à celle du rayonnement. La matière détectée avec nos moyens actuels apporte une contribution de 0.1 dans le facteur Ω_m, la partie manquante (0.25) est constituée de matière noire.